**Άσκηση 3** (Μον. 20)

1. (μον. 10) Να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος

 .

1. (μον. 6) Έστω *a, b, c* πραγματικές παράμετροι. Εξηγείστε γιατί το γραμμικό σύστημα



έχει πάντοτε μοναδική λύση.

Γ. (μον. 4) Υπάρχει ομογενές γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 4 αγνώστους το οποίο να έχει μοναδική λύση; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

**Λύση**

**Α.** Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$Α= \left(\begin{matrix}1&1&1&0\\-2&5&2&2\\8&1&4&-2\end{matrix}\right)$$

Και εφαρμόζουμε πράξεις για να τον κάνουμε κλιμακωτό πίνακα. Αρχικά εφαρμόζουμε τους μετασχηματισμούς $R\_{2}\leftarrow R\_{2}+2R\_{1}, R\_{3}\leftarrow R\_{3}-8R\_{1}$ και παίρνουμε τον πίνακα

$$\left(\begin{matrix}1&1&1&0\\0&7&4&2\\0&-7&-4&-2\end{matrix}\right).$$

Ακολούθως, διαρούμε όλα τα στοιχεία της 2ης γραμμής με το 7 και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον $R\_{3}\leftarrow R\_{3}+7R\_{2}$, οπότε παίρνουμε τον

$$\left(\begin{matrix}1&1&1&0\\0&1&4/7&2/7\\0&0&0&0\end{matrix}\right).$$

Ο πίνακας αυτός είναι κλιμακωτός. Το αντίστοιχο σύστημα θα είναι:

$$\begin{matrix}x+y+z=0\\y+\frac{4}{7}z=\frac{2}{7}\\\end{matrix}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει άπειρες λύσεις, με $y=\frac{2-4z}{7}$ και $x=-\frac{2+3z}{7}$. Η γενική λύση του συστήματος είναι $\left(x,y,z\right)=\left(-\frac{2+3ζ}{7},\frac{2-4ζ}{7},ζ\right)$, όπου $ζ$ πραγματικός αριθμός.

**Β.** Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα των συντελεστών είναι ίση με

$$\left|\begin{matrix}1&1&1\\2&-1&3\\4&1&9\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}-1&3\\1&9\end{matrix}\right|-\left|\begin{matrix}2&3\\4&9\end{matrix}\right|+\left|\begin{matrix}2&-1\\4&1\end{matrix}\right|=…=-12.$$

Επομένως, το σύστημα έχει μοναδική λύση.

**Γ.** Δεν υπάρχει τέτοιο σύστημα. Ο πίνακας των συντελεστών ενός τέτοιου συστήματος έχει το πολύ τάξη 3. Η διάσταση του χώρου λύσεων του συστήματος είναι ίση με $n-r$, όπου $n$ είναι το πλήθος των αγνώστων και $r$ η τάξη του πίνακα των συντελεστών. Αφού $r\leq 3$ και $n=4$, θα ισχύει $n-r\geq 1$. Ένα τέτοιο σύστημα έχει σίγουρα άπειρες λύσεις.