# ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΜΕΡΟΣ Β
# ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1$^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ

## Ι. Επίλυση Εξισώσεων 1$^{ου}$ Βαθμού

Οι εξισώσεις 1$^{ου}$ βαθμού είναι απλές και επιλύονται πολύ εύκολα. Η μεθοδολογία επίλυσης αποτελείται από τα παρακάτω βήματα:

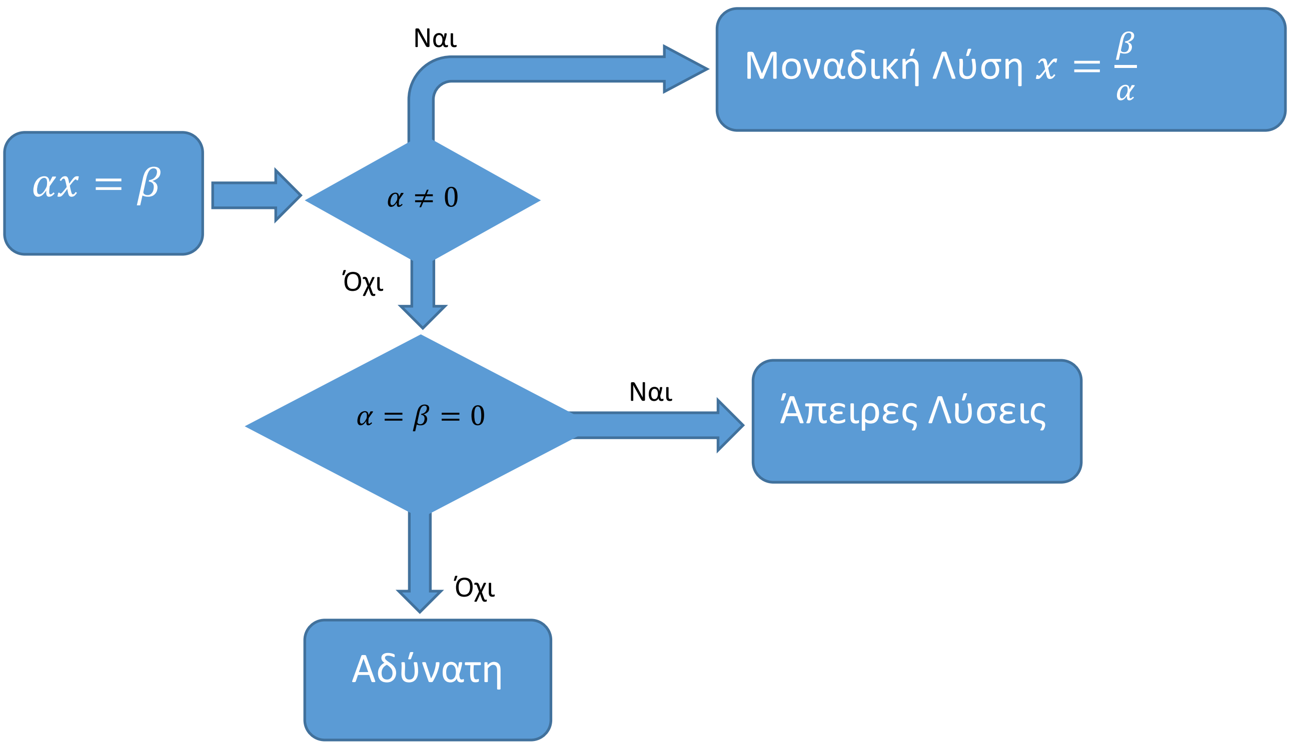
**Βήμα 1: Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους**. Συνήθως μεταφέρουμε όλους τους όρους που περιέχουν τον άγνωστο x αριστερά, ενώ όλοι οι υπόλοιποι όροι μεταφέρονται δεξιά.

**Βήμα 2: Αναγωγή ομοίων όρων.** Εκτελούμε τις πράξεις και στα δύο μέλη της εξίσωσης έτσι ώστε να μείνει μόνο ένας όρος σε κάθε μέλος.

**Βήμα 3: Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου**. Στο τέλος διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου x έτσι ώστε στο αριστερό μέλος να υπάρχει μόνο το x. Αυτό ολοκληρώνει την διαδικασία.

**ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν ο συντελεστής του αγνώστου είναι 0 δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το τελευταίο βήμα. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση θα είναι είτε αδύνατη είτε αόριστη.**

Ο γενικός αλγόριθμος επίλυσης μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης μπορεί να αναπαρασταθεί με το παρακάτω διάγραμμα ροής.



**Παράδειγμα 1:** Να λυθεί η εξίσωση $2x - 3 = 1 - 2x + 4 + x$.

Ακολουθούμε τη μεθοδολογία βήμα προς βήμα:

Βήμα 1: $2x - 3 = 1 - 2x + 4 + x \Leftrightarrow 2x + 2x - x = 1 + 4 + 3$

Βήμα 2: $2x + 2x - x = 1 + 4 + 3 \Leftrightarrow 3x = 7$

Βήμα 3: $3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$.

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η εξίσωση έχει μοναδική λύση τον αριθμό 7/3.

**Παράδειγμα 2**: Να λυθεί η εξίσωση $2(x - 1) = 3(1 - x) - 2(2x - 1)$.

Πριν αρχίσουμε την βασική μεθοδολογία θα πρέπει πρώτα να κάνουμε τις πράξεις στα δύο μέλη ώστε να φύγουν οι παρενθέσεις.

Προκαταρκτικά: $2(x - 1) = 3(1 - x) - 2(2x - 1) \Leftrightarrow 2x - 2 = 3 - 3x - 4x + 2$

Βήμα 1: $2x - 2 = 3 - 3x - 4x + 2 \Leftrightarrow 2x + 3x + 4x = 3 + 2 + 2$

Βήμα 2: $2x + 3x + 4x = 3 + 2 + 2 \Leftrightarrow 9x = 7$

Βήμα 3: $9x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{9}$.

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση τον αριθμό 7/9.

**Παράδειγμα 3**: Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2x-2}{4} + 1 = \frac{1+x}{2}$.

Πριν αρχίσουμε την βασική μεθοδολογία θα πρέπει πρώτα να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας με το ΕΚΠ του 4 και του 2.

Προκαταρκτικά: $\frac{2x-2}{4} + 1 = \frac{1+x}{2} \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} 4\,\frac{2x-2}{4} + 4 = 4\frac{1+x}{2} \Leftrightarrow 2x - 2 + 4 = 2(1 + x) \Leftrightarrow$

$2x - 2 + 4 = 2 + 2x$.

Βήμα 1: $2x - 2 + 4 = 2 + 2x \Leftrightarrow 2x - 2x = 2 + 2 - 4$

Βήμα 2: $2x - 2x = 2 + 2 - 4 \Leftrightarrow 0x = 0$.

Βήμα 3: Η εξίσωση είναι αόριστη, αφού κάθε αριθμός x αν πολλαπλασιαστεί με το 0 δίνει αποτελέσμα 0. Επομένως η εξίσωση δεν έχει μοναδική λύση, αλλά άπειρες λύσεις. Κάθε πραγματικός αριθμός αποτελεί λύση της συγκεκριμένης εξίσωσης.

**Παράδειγμα 4**: Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2x-2}{4} = \frac{1+x}{2}$.

Όπως και στο παράδειγμα 3, θα πρέπει πρώτα να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας με το ΕΚΠ του 4 και του 2.

Προκαταρκτικά: $\frac{2x-2}{4} = \frac{1+x}{2} \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} 4\,\frac{2x-2}{4} = 4\frac{1+x}{2} \Leftrightarrow 2x - 2 = 2(1 + x) \Leftrightarrow$

$2x - 2 = 2 + 2x$.

Βήμα 1: $2x - 2 = 2 + 2x \iff 2x - 2x = 2 + 2$

Βήμα 2: $2x - 2x = 2 + 2 \iff 0x = 4$.

Βήμα 3: Η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού δεν υπάρχει αριθμός x, ο οποίος αν πολλαπλασιαστεί με το 0 δίνει αποτελέσμα 4. Δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί που να επαληθεύουν την εξίσωση.

**Παράδειγμα 5**: Να λυθεί η εξίσωση $x - 1 = \lambda(x - \lambda)$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda$.

Εδώ έχουμε μια παραμετρική εξίσωση πρώτου βαθμού. Το λ θεωρείται γνωστός αριθμός, ο οποίος απλά δεν δίνεται. Εμείς πρέπει να λύσουμε την εξίσωση ως προς τον άγνωστο x.

Προκαταρκτικά: $x - 1 = \lambda(x - \lambda) \iff x - 1 = \lambda x - \lambda^2$

Βήμα 1: $x - 1 = \lambda x - \lambda^2 \iff x - \lambda x = 1 - \lambda^2$

Βήμα 2: $x - \lambda x = 1 - \lambda^2 \iff x(1 - \lambda) = (1 - \lambda)(1 + \lambda)$.

Βήμα 3: Σε αυτό το σημείο πρέπει να διαιρέσουμε με τον συντελεστή του αγνώστου, ο οποίος είναι το $(1 - \lambda)$. Επειδή όμως ο συντελεστής αυτός μπορεί να γίνει ίσος με 0 πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις.

Περίπτωση $1^η$: Αν $\lambda \neq 1$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση αφου΄

$$x(1 - \lambda) = (1 - \lambda)(1 + \lambda) \iff x = \frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{(1-\lambda)} \iff x = 1 + \lambda.$$

Περίπτωση $2^η$: Αν $\lambda = 1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 0$, επομένως είναι αόριστη.

## II. Επίλυση Ανισώσεων 1ου Βαθμού

Οι ανισώσεις 1ου βαθμού λύνονται με παρόμοιο τρόπο. Πρέπει να προσέχουμε όμως το βήμα της διαίρεσης γιατί μπορεί να χρειαστεί να αλλάξει η φορά της ανίσωσης. Παρακάτω δίνουμε με λεπτομέρειες τη μεθοδολογία:

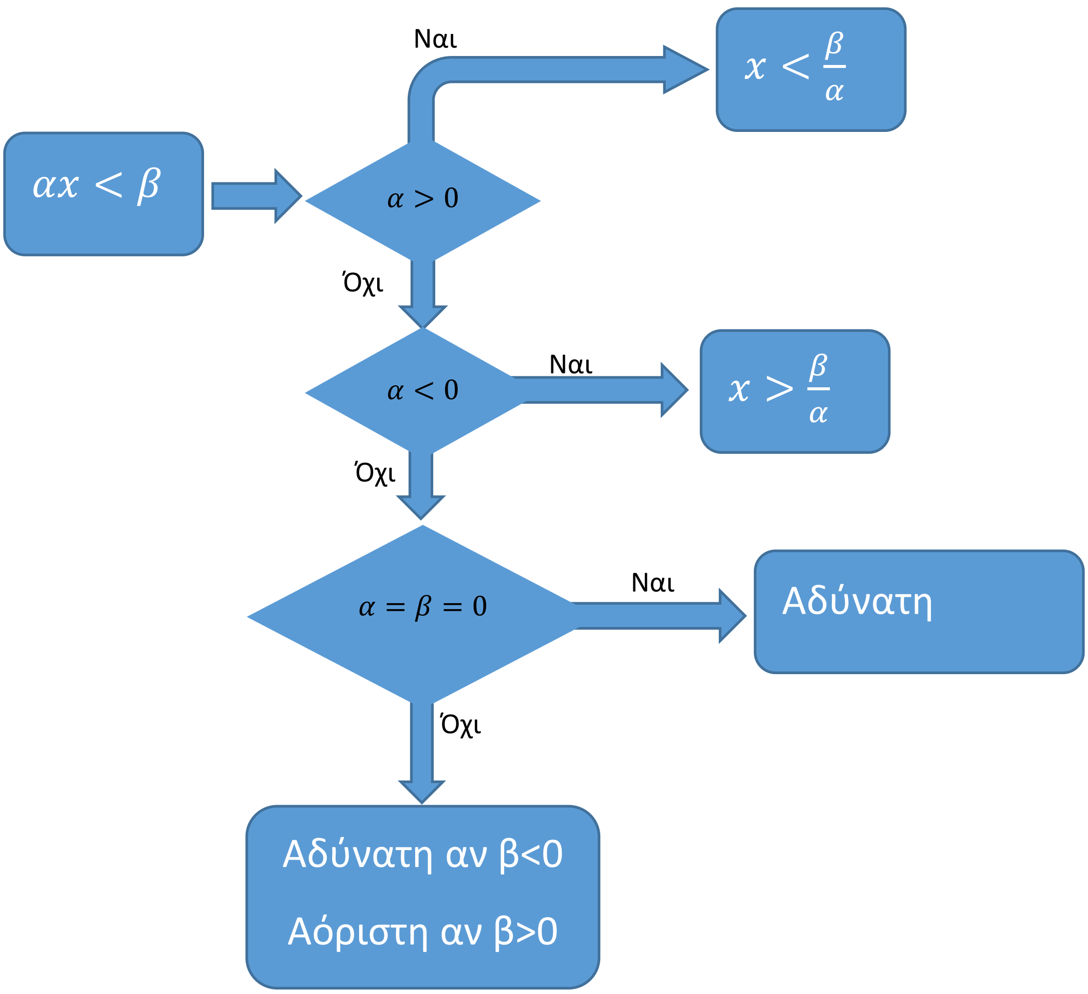
**Βήμα 1: Χωρίζουμε γνωστούς – αγνώστους**. Συνήθως μεταφέρουμε όλους τους όρους που περιέχουν τον άγνωστο $x$ αριστερά, ενώ όλοι οι υπόλοιποι όροι μεταφέρονται δεξιά.

**Βήμα 2: Αναγωγή ομοίων όρων.** Εκτελούμε τις πράξεις και στα δύο μέλη της ανίσωσης έτσι ώστε να μείνει μόνο ένας όρος σε κάθε μέλος.

**Βήμα 3: Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου**. Στο τέλος διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου $x$ έτσι ώστε στο αριστερό μέλος να υπάρχει μόνο το x. Αυτό ολοκληρώνει την διαδικασία. Στην περίπτωση που ο συντελεστής είναι αρνητικός <u>πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης</u>.

**ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν ο συντελεστής του αγνώστου είναι 0 δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το τελευταίο βήμα. Σε αυτή την περίπτωση η ανίσωση θα είναι είτε αδύνατη είτε αόριστη.**

Ο γενικός αλγόριθμος επίλυσης μιας πρωτοβάθμιας ανίσωσης μπορεί να αναπαρασταθεί με το παρακάτω διάγραμμα ροής.



**Παράδειγμα 1:** Να λυθεί η ανίσωση $2x - 3 < 1 - 2x + 4 + x$.

Ακολουθούμε τη μεθοδολογία βήμα προς βήμα:

Βήμα 1: $2x - 3 < 1 - 2x + 4 + x \Leftrightarrow 2x + 2x - x < 1 + 4 + 3$

Βήμα 2: $2x + 2x - x < 1 + 4 + 3 \Leftrightarrow 3x < 7$

Βήμα 3: $3x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}$.

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η εξίσωση έχει λύσεις όλους τους αριθμούς που βρίσκονται στο διάστημα $\left[-\infty,\ \frac{7}{3}\right)$.

**Παράδειγμα 2**: Να λυθεί η ανίσωση $2(x - 1) \geq 3(1 - x) - 2(2x - 1)$.

Πριν αρχίσουμε την βασική μεθοδολογία θα πρέπει πρώτα να κάνουμε τις πράξεις στα δύο μέλη ώστε να φύγουν οι παρενθέσεις.

Προκαταρκτικά: $2(x - 1) \geq 3(1 - x) - 2(2x - 1) \Leftrightarrow 2x - 2 \geq 3 - 3x - 4x + 2$

Βήμα 1: $2x - 2 \geq 3 - 3x - 4x + 2 \Leftrightarrow 2x + 3x + 4x \geq 3 + 2 + 2$

Βήμα 2: $2x + 3x + 4x \geq 3 + 2 + 2 \Leftrightarrow 9x = 7$

Βήμα 3: $9x \geq 7 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{9}$.

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η εξίσωση έχει λύσεις όλους τους αριθμούς που βρίσκονται στο διάστημα $\left[\frac{7}{9}, +\infty\right)$.

**Παράδειγμα 3**: Να λυθεί η ανίσωση $\frac{2x-2}{4} + 1 < \frac{1+x}{2}$.

Πριν αρχίσουμε την βασική μεθοδολογία θα πρέπει πρώτα να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας με το ΕΚΠ του 4 και του 2.

Προκαταρκτικά: $\frac{2x-2}{4} + 1 < \frac{1+x}{2} \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} 4\ \frac{2x-2}{4} + 4 < 4\frac{1+x}{2} \Leftrightarrow 2x - 2 + 4 < 2(1 + x) \Leftrightarrow$

$2x - 2 + 4 < 2 + 2x$.

Βήμα 1: $2x - 2 + 4 < 2 + 2x \Leftrightarrow 2x - 2x < 2 + 2 - 4$

Βήμα 2: $2x - 2x < 2 + 2 - 4 \Leftrightarrow 0x < 0$.

Βήμα 3: Η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού κάθε αριθμός x αν πολλαπλασιαστεί με το 0 δίνει αποτελέσμα ίσο με 0. Επομένως δεν υπάρχουν αριθμοί που να δίνουν αποτέλεσμα μικρότερο του 0.

**Παράδειγμα 4**: Να λυθεί η ανίσωση $\frac{2x-2}{4} \leq \frac{1+x}{2}$.

Όπως και στο παράδειγμα 3, θα πρέπει πρώτα να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας με το ΕΚΠ του 4 και του 2.

Προκαταρκτικά: $\frac{2x-2}{4} \leq \frac{1+x}{2} \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} 4\ \frac{2x-2}{4} \leq 4\frac{1+x}{2} \Leftrightarrow 2x-2 \leq 2(1+x) \Leftrightarrow$

$2x-2 \leq 2+2x$.

Βήμα 1: $2x-2 \leq 2+2x \;\;\Leftrightarrow\;\; 2x-2x \leq 2+2$

Βήμα 2: $2x-2x \leq 2+2 \;\;\Leftrightarrow 0x \leq 4$.

Βήμα 3: Η εξίσωση είναι αόριστη, αφού κάθε αριθμός x αν πολλαπλασιαστεί με το 0 δίνει αποτελέσμα ίσο με το 0, άρα μικρότερο του 4. Επομένως, κάθε πραγματικός αριθμός επαληθεύει την ανίσωση.

**Παράδειγμα 5**: Να λυθεί η ανίσωση $x-1 < \lambda(x-\lambda)$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda$.

Εδώ έχουμε μια παραμετρική εξίσωση πρώτου βαθμού. Το λ θεωρείται γνωστός αριθμός, ο οποίος απλά δεν δίνεται. Εμείς πρέπει να λύσουμε την εξίσωση ως προς τον άγνωστο x.

Προκαταρκτικά: $x-1 < \lambda(x-\lambda) \;\;\Leftrightarrow\;\; x-1 < \lambda x - \lambda^2$

Βήμα 1: $x-1 < \lambda x - \lambda^2 \;\;\Leftrightarrow\;\; x - \lambda x < 1-\lambda^2$

Βήμα 2: $x - \lambda x < 1-\lambda^2 \;\;\Leftrightarrow\;\; x(1-\lambda) < (1-\lambda)(1+\lambda)$.

Βήμα 3: Σε αυτό το σημείο πρέπει να διαιρέσουμε με τον συντελεστή του αγνώστου, ο οποίος είναι το $(1-\lambda)$.

Περίπτωση $1^η$: Αν $1-\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$ τότε

$x(1-\lambda) < (1-\lambda)(1+\lambda) \Leftrightarrow \;\; x < \frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{(1-\lambda)} \;\;\Leftrightarrow\;\; x < 1+\lambda$.

Περίπτωση $2^η$: Αν $\lambda > 1$, τότε (αλλάζουμε τη φορά):

$x(1-\lambda) < (1-\lambda)(1+\lambda) \Leftrightarrow \;\; x > \frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{(1-\lambda)} \;\;\Leftrightarrow\;\; x > 1+\lambda$.

Περίπτωση $3^η$: Αν $\lambda = 1$, τότε

$0x < 0$, επομένως η ανίσωση δεν έχει λύσεις.

## Ασκήσεις

**1.** Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $9(8-x)-10(9-x)-4(x-1)=1-8x$

ii) $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}=2+\frac{3x-1}{15}$

iii) $5(x-3)+10(2-5x)+10x=-(15+10)x$

iv) $\frac{7y+4}{5}-y=\frac{3y-5}{2}$

**2.** Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{\omega-1}{7}+\frac{23-\omega}{5}=7-\frac{4+\omega}{4}$

ii) $\frac{1}{6}(8-t)+t-\frac{5}{3}=\frac{1}{2}(t+6)-\frac{t}{3}$

iii) $2x-\left(\frac{15}{9}x-5\right)=\frac{x-6}{3}+7$

**3.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $(x+5)(x+4)-\frac{1}{2}(x-1)(x+2)-\frac{1}{2}(x-3)^2=0$

ii) $\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}(y+2)^2=\left(\frac{y-1}{2}\right)^2+\frac{5}{3}$

**4.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\lambda x+\lambda+1=x$

ii) $(\lambda^3-4\lambda)x=\lambda^2+4\lambda+4$

**5.** Να λύσετε τις παραμετρικές εξισώσεις:

i) $(\lambda-1)x=\lambda^2-1$

ii) $\lambda x+8\mathrm{x}=2(\lambda-1)x+10$

**6.** Να διερευνήσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου μ:

i) $\mu^2(x-2)-3\mu=x+1$

ii) $\frac{x+\mu}{5}=\frac{\mu x-1}{15}+\frac{\mu^2-4\mu+5}{3}$

**7.** Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $ax+a=bx+b$

ii) $a^2x-a=b^2x-b$

iii) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$

**8.** Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-4}{3}\geq 1+\frac{x-3}{4}$

ii) $4(y+1)^2-(y+3)^2<3(y-2)^2$

iii) $2x+3\geq 4x+1$

iv) $(x+2)^2-(x-2)^2<0$

vi) $\frac{a+5}{6}+2\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{2}+\frac{a-1}{3}\right)$

vii) $y-\frac{y-2}{2}>\frac{y-1}{2}-\frac{y-3}{4}$

**9.** Να λύσετε τις ανισώσεις για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων:

i) $\lambda(x+5)>x-4$

ii) $\frac{2+ax}{3}+\frac{a-x}{4}\leq\frac{2a-x}{6}$